

ECUACIONES DIFERENCIALES

Hoja 2

1 Consideremos la ecuación

$$x' = \sin 2x. \quad (1)$$

1. Sea $x(t)$ la solución de (1). demostrar que

$$|x(t) - x(s)| \leq |t - s| \quad \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}.$$

2. Demostrar que las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$.

3. Sean x e y dos soluciones maximales. Demostrar que

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)|e^{2|t-t_0|} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

4. Demostrar que si x y x_n , $n \in \mathbb{N}$, son soluciones de (1) tales que para cierto t_0 se tenga

$$x_n(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t_0)$$

entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t)$$

5. ¿La convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$? ¿Y en abiertos acotados?

2 Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ un función $\mathcal{C}^1$. Para ciertos $\sigma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que $\sigma < \delta$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(t, x) &< 0 & \text{si } x > \delta, \\ f(t, x) &> 0 & \text{si } x < \sigma. \end{aligned}$$

Probar que todas las soluciones maximales de $x' = f(t, x)$ están definidas hasta $+\infty$.

3 Consideremos la ecuación

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad (2)$$

donde f es diferenciable y λ es un parámetro real. estudiamos la dependencia de las soluciones del parámetro λ asociando a la ecuación (2) el siguiente sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ \lambda' = 0, \end{cases} \quad (3)$$

considerando a λ como una componente más (aunque conocida) de la solución. La solución de (3) con $x(t_0) = x_0$ y $\lambda(t_0) = \lambda_0$ no es más que la solución de (2) para $\lambda = \lambda_0$.

1. Demostrar que si existe L tal que

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, y, \mu)\| \leq L(\|x - y\| + |\lambda - \mu|)$$

para todo $(x, \lambda), (y, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$ entonces las soluciones de los problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

satisfacen:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + |\lambda - \mu|)e^{L|t-t_0|}.$$

2. Enunciar y demostrar un resultado de dependencia continua respecto de los parámetros.
3. Comprobar que las soluciones de $x'' + x = 0$, y de $y'' + (1 + \varepsilon)y = 0$ con valores iniciales $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 1$ son periódicas de períodos distintos si $\varepsilon \neq 0$ por lo que resulta imposible que se mantengan próximas para todo t por muy pequeño que se elija ε . ¿Cómo encaja ésto con el teorema del apartado 2?